나형 정답

1	②	2	③	3	⑤	4	③	5	①
6	④	7	②	8	③	9	②	10	④
11	④	12	⑤	13	②	14	①	15	③
16	①	17	⑤	18	①	19	④	20	⑤
21	④	22	42	23	12	24	90	25	6
26	510	27	40	28	18	29	273	30	80

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3\times 27^{\frac{1}{3}}=3\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=3\times 3=9$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cap B=\{4\}$ 이므로 $a+2=4$, $b=4$
따라서 $a+b=2+4=6$

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{2}$$

4. [출제의도] 역함수 이해하기

$f(2)+f^{-1}(3)=4+1=5$

5. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^3(x^2-2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x\right]_0^3=3$$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2-}(x+1)=\lim_{x\to 2+}(x^2-4x+a)=f(2)$
$3=-4+a$
따라서 $a=7$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -2-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=-1+3=2$

8. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기

직선 $y=x$는
함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$의 두 점근선의 교점 $(3,\ a)$를
지나므로 $a=3$

9. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\frac{2}{3}=7\,\mathrm{P}(A\cap B)=7\,\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=7\times\frac{1}{3}\times\mathrm{P}(B)$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}$

10. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수 $y-(-1)=\sqrt{(x-b)-1}+a$의 그래프와
함수 $y=\sqrt{x-4}$의 그래프가 일치하므로
$a=1$, $b=3$
따라서 $a+b=4$

11. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

이 고등학교 3학년 학생 300명 중 임의로 선택한 1명이 영화 관람을 희망한 학생일 사건을 X, 뮤지컬 관람을 희망한 학생일 사건을 Y라 하면

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{90}{300}}{\frac{210}{300}}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$$

12. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_a\frac{a^3}{b^2}=\log_a a^3-\log_a b^2=3-2\log_a b=2$
$\log_a b=\frac{1}{2}$, $\log_b a=2$
따라서 $\log_a b+3\log_b a=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$

13. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제해결하기

전기 자동차 배터리 1개의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64.2,\ 0.4^2)$을 따른다.
Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$$\mathrm{P}(X\ge 65)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{65-64.2}{0.4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

14. [출제의도] 등차수열의 성질 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a+8d=2(a+2d)$, $a=4d$

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{24}\frac{d^2}{a_na_{n+1}}=d^2\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=d\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{24}}-\frac{1}{a_{25}}\right)\right\}$$
$$=d\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{25}}\right)=d\left(\frac{a_{25}-a_1}{a_1\times a_{25}}\right)$$
$$=d\times\frac{24d}{a\times(a+24d)}=\frac{24d^2}{4d\times 28d}=\frac{3}{14}$$

15. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 추론하기

$S(A)=a+b+c+d+e=37$
$S(B)=a+b+c+d+e+5k=37+5k$
$S(B)=S(A\cup B)-S(A-B)$
$37+5k=92-15$ 따라서 $k=8$
(참고) $A=\{2,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12\}$
$B=\{10,\ 12,\ 17,\ 18,\ 20\}$

16. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z(X<Y<Z)$라 하자.
X, Y, Z를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.
X보다 작은 레인 번호의 개수를 a,
X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b,
Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c,
Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면
$a+b+c+d=5\ (a\ge 0,\ b\ge 1,\ c\ge 1,\ d\ge 0)$
$b=b'+1$, $c=c'+1$
$a+b'+c'+d=3\ (a\ge 0,\ b'\ge 0,\ c'\ge 0,\ d\ge 0)$
${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
3개의 레인 번호 X, Y, Z를
3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 $3!$
따라서 $20\times 3!=120$

17. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d,
등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_7=a_6+d$, $b_7=b_6\times r$
$9+d=9r$
$r=1+\frac{d}{9}$ 이므로 d는 9의 배수
$a_{11}=a_6+5d=9+5d$
$94<9+5d<109$, $17<d<20$
d는 9의 배수이므로 $d=18$
$9+18=9r$, $r=3$
$a_7+b_8=(a_6+d)+(b_6\times r^2)$
$=(9+18)+(9\times 3^2)=108$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

꺼낸 3장의 카드의 앞면에 적혀 있는 수를 차례로 α, β, γ라 할 때, 이를 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$와 같이 나타내자.
$X=0$인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 모두 같은 경우이므로 $(1,\ 2,\ 3)$의 1가지
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{60}$
$X=1$인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 2인 경우이다.
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1과 2로 같은 경우는 $(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 2,\ 5)$의 2가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가
1과 3 또는 2와 3으로 같은 경우도 각각
2가지이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2\times 3}{60}=\boxed{\frac{1}{10}}$
$X=2$인 사건은
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 1인 경우이다.
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1로 같은 경우는
$(1,\ 3,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 5)$, $(1,\ 4,\ 2)$,
$(1,\ 4,\ 5)$, $(1,\ 5,\ 2)$, $(1,\ 5,\ 4)$의 7가지,
앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가
2 또는 3으로 같은 경우도 각각 7가지이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{7\times 3}{60}=\boxed{\frac{7}{20}}$
$X=3$인 사건의 경우에는
$\mathrm{P}(X=3)=1-\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{10}+\frac{7}{20}\right)=\frac{8}{15}$

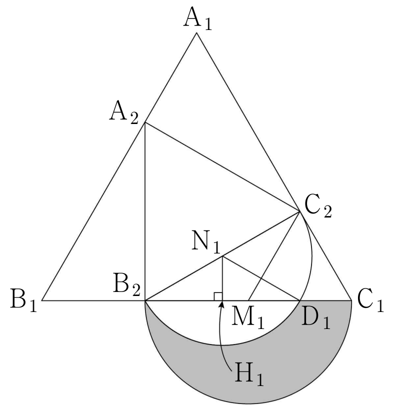
$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{60}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{8}{15}$$
$$=\boxed{\frac{12}{5}}$$

$a=\frac{1}{10}$, $b=\frac{7}{20}$, $c=\frac{12}{5}$
따라서 $10a+20b+5c=20$

19. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

선분 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$이므로 $\overline{\mathrm{B_2C_1}}=2$, $\overline{\mathrm{C_1C_2}}=1$
선분 $\mathrm{B_2C_1}$을 지름으로 하는 반원의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\overline{\mathrm{B_2C_1}}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$
선분 $\mathrm{B_2C_1}$, $\mathrm{B_2C_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$를 지름으로 하는 반원의 호와

선분 B_2C_1 의 교점을 D_1이라 하자.



$\overline{M_1C_1}=\overline{C_1C_2}=1$, $\angle C_1=60^\circ$ 이므로
삼각형 $C_1C_2M_1$ 은 정삼각형
$\angle B_2M_1C_2=120^\circ$
삼각형 $M_1C_2B_2$ 는 $\overline{M_1B_2}=\overline{M_1C_2}=1$ 인
이등변삼각형이므로 $\angle M_1C_2B_2=30^\circ$
삼각형 $B_2C_1C_2$ 는 $\angle C_2=90^\circ$ 인 직각삼각형
$\overline{B_2C_2}^2=\overline{B_2C_1}^2-\overline{C_1C_2}^2=4-1=3$
$\overline{B_2C_2}=\sqrt{3}$,
같은 방법으로 $\overline{A_2B_2}=\overline{C_2A_2}=\sqrt{3}$ 이므로
삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 정삼각형
삼각형 $N_1B_2D_1$ 은
$\angle B_2N_1D_1=120^\circ$,
$\overline{N_1B_2}=\overline{N_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 인 이등변삼각형
부채꼴 $N_1B_2D_1$ 의 넓이는

$$\pi\times\overline{B_2N_1}^2\times\frac{120^\circ}{360^\circ}=\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

점 N_1 에서 선분 B_2D_1 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하면,

$\overline{N_1H_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\overline{B_2H_1}=\dfrac{3}{4}$

$\overline{B_2D_1}=2\overline{B_2H_1}=\dfrac{3}{2}$

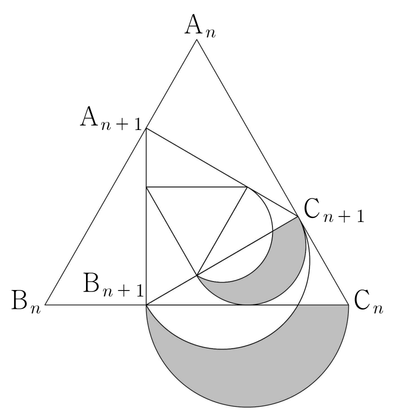
삼각형 $N_1B_2D_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{B_2D_1}\times\overline{N_1H_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$S_1=$(선분 B_2C_1 을 지름으로 하는 반원의 넓이)
$-$(부채꼴 $N_1B_2D_1$의 넓이)
$+$(삼각형 $N_1B_2D_1$의 넓이)

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{16}=\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n\geq 1)$



정삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$\overline{B_{n+1}C_n}=\dfrac{2}{3}a_n$, $\overline{C_nC_{n+1}}=\dfrac{1}{3}a_n$

삼각형 $B_{n+1}C_nC_{n+1}$ 은
$\angle C_{n+1}=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$(a_{n+1})^2=\left(\frac{2}{3}a_n\right)^2-\left(\frac{1}{3}a_n\right)^2,\ a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}a_n$$

그림 R_{n+1} 에 새로 색칠된 부분의 넓이를

b_{n+1} 이라 하면 $b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$, $b_1=S_1$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}$ 이고,

공비가 $\dfrac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k$$
$$=\frac{\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{16}}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{12\pi+9\sqrt{3}}{32}$$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=f(-x)$ 이고 방정식 $f(x)=0$ 의
서로 다른 실근의 개수가 3 이므로 $f(0)=c=0$

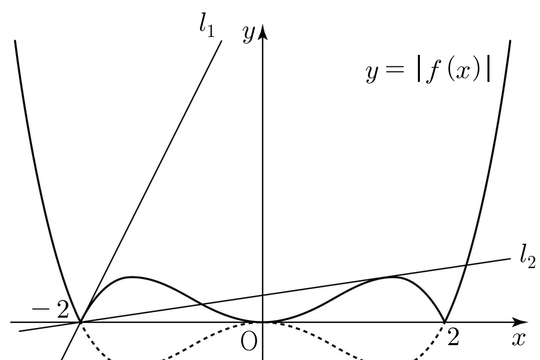
$f(1)=a+b+0=-\dfrac{3}{4}$, $f'(-1)=-4a-2b=1$

$a=\dfrac{1}{4}$, $b=-1$

ㄱ. $f(0)=0$ (참)

ㄴ. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2=\dfrac{1}{4}x^2(x+2)(x-2)$
$\alpha=-2$, $\beta=0$, $\gamma=2$
$f'(x)=x^3-2x$
$f'(\alpha)=f'(-2)=-4$ (참)

ㄷ.



곡선 $y=-f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 0)$ 에서의
접선 l_1 의 기울기는 $-f'(-2)=-(-4)=4$
점 $(-2,\ 0)$ 에서 곡선 $y=-f(x)$ 에 그은
접선 중 하나를 l_2라 할 때,

접점을 $\left(t,\ -\dfrac{1}{4}t^4+t^2\right)$ $(t\neq -2,\ 0)$ 이라 하자.

직선 l_2 의 기울기는
$-f'(t)=-(t^3-2t)=-t^3+2t$
직선 l_2 의 방정식은

$$y=(-t^3+2t)(x-t)-\frac{1}{4}t^4+t^2$$

직선 l_2가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$$0=(-t^3+2t)(-2-t)-\frac{1}{4}t^4+t^2$$

$$t(3t-4)(t+2)^2=0,\ t=\frac{4}{3}$$

$$-f'\left(\frac{4}{3}\right)=-\left(\frac{4}{3}\right)^3+2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{27}$$

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선
$y=k(x+2)$ 의 교점의 개수는

(i) $0<k<\dfrac{8}{27}$ 일 때, 5 개

(ii) $k=\dfrac{8}{27}$ 일 때, 4 개

(iii) $\dfrac{8}{27}<k<4$ 일 때, 3 개

(iv) $k\geq 4$ 일 때, 2 개

그러므로 방정식 $|f(x)|=k(x+2)$ 의
서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는
양수 k 의 범위는 $\dfrac{8}{27}<k<4$ (참)

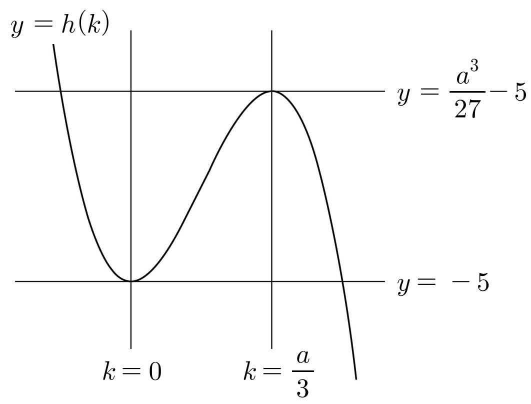
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 접선의 방정식과 합성함수를 활용하여 문제해결하기

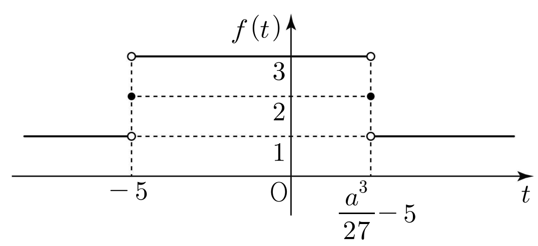
점 $(0,\ t)$를 지나는 직선이
곡선 $y=x^3-ax^2+3x-5$ 와 접할 때의 접점을
$(k,\ k^3-ak^2+3k-5)$ 라 하자.
$y'=3x^2-2ax+3$ 이므로
접선의 방정식은
$y=(3k^2-2ak+3)(x-k)+k^3-ak^2+3k-5$
이고, 이 접선이 점 $(0,\ t)$를 지나므로
$t=-2k^3+ak^2-5$
$f(t)$는 곡선 $y=-2k^3+ak^2-5$ 와
직선 $y=t$ 의 교점의 개수이다.
$h(k)=-2k^3+ak^2-5$ 라 하면,
$h'(k)=-6k^2+2ak=-2k(3k-a)$

$h'(0)=h'\left(\dfrac{a}{3}\right)=0$

$h(0)=-5$, $h\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}-5$



$$f(t)=\begin{cases}1 & (t<-5)\\ 2 & (t=-5)\\ 3 & \left(-5<t<\dfrac{a^3}{27}-5\right)\\ 2 & \left(t=\dfrac{a^3}{27}-5\right)\\ 1 & \left(t>\dfrac{a^3}{27}-5\right)\end{cases}$$



$$g(t)=f(f(t))=\begin{cases}f(1) & (t<-5)\\ f(2) & (t=-5)\\ f(3) & \left(-5<t<\dfrac{a^3}{27}-5\right)\\ f(2) & \left(t=\dfrac{a^3}{27}-5\right)\\ f(1) & \left(t>\dfrac{a^3}{27}-5\right)\end{cases}$$

함수 $g(t)$에서

(i) $\frac{a^3}{27}-5<3$인 경우

$-5<t<\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=1$이므로

조건(가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{a^3}{27}-5=3$인 경우

$t<-5$, $t>\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(1)=3$

$t=-5$, $\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(2)=3$

$-5<t<\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=2$

함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수가 2이므로

조건(나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{a^3}{27}-5>3$인 경우

실수 전체의 집합에서

$f(t)\le 3<\frac{a^3}{27}-5$이므로 $g(t)=3$이다.

이는 조건(가), (나)를 모두 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 조건을
만족시키는 a의 범위는 $a^3>8\times27=6^3$

자연수 a의 최솟값 $m=7$,

$g(m)=f(f(7))=3$

따라서 $m+g(m)=7+3=10$

22. [출제의도] 순열 계산하기

${}_7\mathrm{P}_2=7\times6=42$

23. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=4x^3-10x$, $f'(2)=12$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

$(3x+1)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}\times1^r$

$5-r=2$, $r=3$

따라서 x^2의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3\times3^2=90$

25. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t\ (t\ge0)$에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=3t^2-6t+a$

$v(3)=3\times3^2-6\times3+a=15$

따라서 $a=6$

26. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

판별식 $D=(a_{n+1})^2-4(a_n)^2=0$

$(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$b=\frac{a^3}{2}$, $S_1=S_2$이므로

$\int_0^1\frac12x^3dx=\int_1^a\left(\frac{a^3}{2}-\frac12x^3\right)dx$

$\left[\frac18x^4\right]_0^1=\left[\frac{a^3}{2}x-\frac18x^4\right]_1^a$

$a^3(3a-4)=0$, $a>1$이므로 $a=\frac43$

따라서 $30a=30\times\frac43=40$

28. [출제의도] 조합을 활용하여 문제해결하기

$f(2)\le2$, $f(3)\le3$, $f(5)\le5$, $f(7)\le7$

$f(1)<f(2)<f(4)<f(8)$

함수 f가 일대일 대응이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

$f(5)$가 될 수 있는 값은 4, 5

$f(7)$이 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7

(i) $f(5)=4$인 경우

$f(7)=5$일 때,

$f(4)$, $f(6)$, $f(8)$이 될 수 있는 값은 6, 7, 8

$f(6)$을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

남겨진 두 수 중에서 작은 수를 $f(4)$,

큰 수를 $f(8)$에 대응시키면 되므로

${}_3\mathrm{C}_1\times1=3$

$f(7)=6$, $f(7)=7$일 때, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$을
정하는 경우의 수도 각각 3이므로

함수 f의 개수는 $3\times3=9$

(ii) $f(5)=5$인 경우

(i)의 경우와 같은 방법으로

함수 f의 개수는 $3\times3=9$

(i), (ii)에 의하여 함수 f의 개수는 18

29. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a\ne0)$,

공차를 d라 하면

$S_9=S_{18}$이므로

$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$

$a=-13d$

$S_n=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$

$S_1=S_{26}=-13d$,

$S_2=S_{25}=-25d$,

$S_3=S_{24}=-36d$,

$\vdots$

$S_{13}=S_{14}=-91d$,

$S_{27}=0$, $S_{28}=14d$, $S_{29}=29d$, $\cdots$

집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는
자연수 n의 값은 13, 14, $\cdots$, 26

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=273$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)|\ge0$이고,

$g(a)=\int_0^a|f'(t)|dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\ge-3$에서 $|f'(x)|\ge0$이므로

함수 $g(x)=\int_0^x|f'(t)|dt$는 증가한다.

삼차함수 $f(x)$는

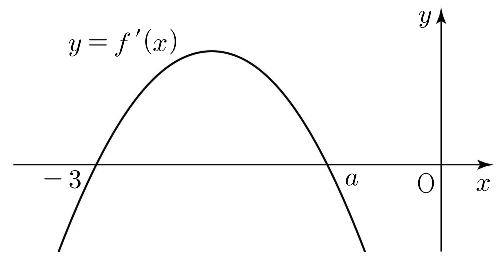
$x=-3$과 $x=a\ (a>-3)$에서 극값을

가지므로 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면

$x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서
증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는
음수이다.



(i) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ii) $-3\le x<a$일 때,

$g(x)=\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt$

$=f(x)+f(0)-2f(a)$

(iii) $x\ge a$일 때,

$g(x)=\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-3-}g(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\lim_{x\to-3+}g(x)=\lim_{x\to-3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}$

$=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(0)=2f(a)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(a)=-f(a)+f(0)=-8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16$, $f(a)=-8$

$f'(x)=k(x+3)(x-a)$

$=k\{x^2+(3-a)x-3a\}$ $(k<0)$이라 하면

$f(x)=k\left(\frac13x^3+\frac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$

$g(-3)=f(-3)=\frac92k(a+1)-16=-16$

$k\ne0$이므로 $a=-1$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<-1)\\ -f(x)-16 & (x\ge-1)\end{cases}$$

$\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$

$=\int_{-1}^4(-16)dx=-16\times5=-80$

따라서 $\left|\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

(참고)

$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형